第 14 卷 第 5 期
2013 年 10 月
北华大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF BEIHUA UNIVERSITY(Natural Science)
Vol. 14 No. 5
Oct. 2013

文章编号:1009-4822(2013)05-0526-04
DOI:10.11713/j.issn.1009-4822.2013.05.007

关于 Smarandache 六角形数补数的下部及上部数列

黄 炜[1],马 焱[2]

(1. 宝鸡职业技术学院基础部,陕西 宝鸡 721013;2. 宝鸡文理学院经济管理系,陕西 宝鸡 721013)

摘要: 设 n 是正整数,$u_6(n)$ 表示不大于 n 的最大六角形数部分数列,$v_6(n)$ 表示不小于 n 的最小六角形数部分数列,$a(n)$ 和 $b(n)$ 分别是 $u_6(n)$ 和 $v_6(n)$ 的补数,研究了下部序列补数 $a(n)$ 及上部序列补数 $b(n)$ 的算术平均值及几何平均值性质,并给出了几个有趣的均值及公式.

关键词: 六角形数;上部序列补数;下部序列补数;均值;渐近公式

中图分类号: O156.4 **文献标志码:** A

On the Inferior and Superior Series of Hexagon Number's Complement

HUANG Wei[1],MA Yan[2]

(*1. Department of Basis Courses,Baoji Vocational and Technical College,Baoji 721013,China;*
2. Economic and Management Department of Baoji University of Arts and Sciences,Baoji 721013,China)

Abstract: Let n be a positive integer,$u_6(n)$ be the largest hexagon number less than or equal to n and $v_6(n)$ be the smallest hexagon number less than n,$a(n)$ and $b(n)$ are complement numbers of $u_6(n)$ and $v_6(n)$ respectively. The arithmetic and the geometric mean value properties of the superior part sequence $a(n)$ and the inferior part sequence $b(n)$ are studied,and several interesting asymptotic formula for them are given.

Key words: hexagon numbers; superior complement sequence; inferior complements sequence; mean value; asymptotic formula

1 引言与结论

对任意给定的正整数 m,我们称自然数 $S(m,6)=m(2m-1)(m=1,2,\cdots)$ 为六边形数,因为这些数 $S(m,6)$ 都可以形象的用如图 1 所示六边形图形表示. 因此,六边形数给出了自然数与几何图形的一种内在联系,自然数 $m(2m-1)$ 给出了六边形数的具体表示形式. 图 1 充分表现了六边形数的几何形状.

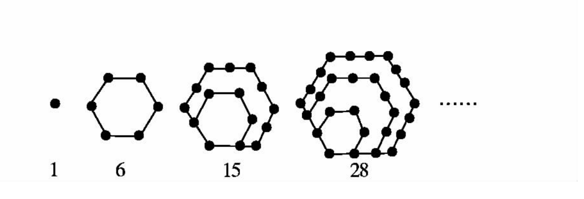


图 1 六边形数的几何形状
Fig. 1 Geometry of hexagon numbers

收稿日期:2013-04-05
基金项目:国家自然科学基金项目(11071194);陕西省自然科学基金项目(09JK432).
作者简介:黄 炜(1961-),男,教授,主要从事解析数论与特殊函数研究.

1.1　整数 n 的六角(边)形数上、下部分数列及其补数数列及结论

设

$$u_6(n)=\max\{m(2m-1):n\geqslant m(2m-1),m\in\mathbb{N}^*\},$$
$$v_6(n)=\min\{m(2m-1):n\leqslant m(2m-1),m\in\mathbb{N}^*\}.$$

即用 $u_6(n)$ 表示不大于 n 的最大的六角形数部分，亦称为下部六角形数部分数列；用 $v_6(n)$ 表示不小于 n 的最小的六角形数部分，亦称为上部六角形数部分数列. 例如，当六角形数为 1,6,15,28,45,66,91,…,$n(2n-1)$,… 时

$u_3(1)=1,u_6(2)=1,u_6(3)=1,u_6(4)=1,u_6(5)=1,u_6(6)=6,u_6(7)=6,u_6(8)=6,$
$u_6(9)=6,u_6(10)=6,u_6(11)=6,u_6(12)=6,u_6(13)=6,u_6(14)=6,u_6(15)=15,\cdots,$
$v_6(1)=1,v_6(2)=6,v_6(3)=6,v_6(4)=6,v_6(5)=6,v_6(6)=6,v_6(7)=15,v_6(8)=15,$
$v_6(9)=15,v_6(10)=15,v_6(11)=15,v_6(12)=15,v_6(13)=15,v_6(15)=15,\cdots,$

并给出结果 $m=\frac{\sqrt{2n}}{2}+O(1)$（见文献[1]）.

称复合函数 $a(n)=n-u_6(n)$ 为下部六角形数部分数列的补数，复合函数 $b(n)=n-v_6(n)$ 为上部六角形数部分数列的补数，即 $a(n),b(n)$ 是最大的非负整数，使得 $n-a(n),n-b(n)$ 为一形如 $m(2m-1)$ 的六角形数. 在文献[2]中，数论专家 F. Smarandach 教授希望研究数列 $a(n)$ 和 $b(n)$ 的性质. 有关六角形数部分数列的各种性质和有关背景参阅文献[1,3-7].

1.2　六角(边)形数的新数论函数

令

$$S_6(m)=[a(1)+a(2)+a(3)+\cdots+a(m)]/m=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}a(i),$$

$$I_6(m)=[b(1)+b(2)+b(3)+\cdots+b(m)]/m=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}b(i),$$

$$K_6(m)=\sqrt[m]{a(1)+a(2)+a(3)+\cdots+a(m)}=\left(\sum_{i=1}^{m}a(i)\right)^{\frac{1}{m}},$$

$$L_6(m)=\sqrt[m]{b(1)+b(2)+b(3)+\cdots+b(m)}=\left(\sum_{i=1}^{m}b(i)\right)^{\frac{1}{m}}.$$

关于新数论函数 $S_6(m),I_6(m),K_6(m),L_6(m)$，我们还没有看到任何有关研究结果. 本文利用文献[7]的思想及初等方法研究了这两个数列的均值性质，并给出了两个有趣的渐近公式，同时研究了下列极限的敛散性:

$$\frac{S_6(m)}{I_6(m)},\ \frac{K_6(m)}{L_6(m)},\ S_6(m)-I_6(m),\ K_6(m)-L_6(m),$$

即结果:

定理 1　对一任意正整数 n，有渐近式及极限式

$$\frac{S_6(n)}{I_6(n)}=1+O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right),\ \lim_{n\to+\infty}\frac{S_6(n)}{I_6(n)}=1.$$

定理 2　对一任意正整数 n，有渐近式及极限式

$$\frac{K_6(n)}{L_6(n)}=1+O\left(n^{-\frac{1}{2n}}\right),\ \lim_{n\to+\infty}\frac{K_6(n)}{L_6(n)}=1,\ \lim_{n\to+\infty}(K_6(n)-L_6(n))=0.$$

定理 3　对一任意正整数 n，有渐近式及极限式

$$S_6(n)-I_6(n)=4+\sqrt{2}n^{-\frac{1}{2}}+O(1),$$
$$\lim_{n\to+\infty}(I_6(n)-S_6(n))=4,\ \lim_{n\to+\infty}(I_6(n)-S_6(n))^{\frac{1}{n}}=1.$$

2 引 理

为了完成定理的证明需要以下引理:

引理1 对于任何实数 $n>1$,设 $S(m,6)=m(2m-1)$,则有渐近公式

$$m=\frac{\sqrt{2n}}{2}+O(1).$$

证明见文献[1].

引理2 对于任意实数 $x>1$,有下面的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}a(n)=\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}+O(x),\ \sum_{n\leqslant x}b(n)=\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}+O(x).$$

证明见文献[3].

3 定理证明

定理1及定理2的证明:

在引理2中取 $x=m$,则

$$S_6(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a(i)=\frac{2\sqrt{2}}{3}n^{\frac{1}{2}}+O(1),$$

$$I_6(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}b(i)=\frac{2\sqrt{2}}{3}n^{\frac{1}{2}}+O(1),$$

立刻得到

$$\frac{S_6(n)}{I_6(n)}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}n^{\frac{1}{2}}+O(1)}{\frac{2\sqrt{2}}{3}n^{\frac{1}{2}}+O(1)}=1+O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\frac{K_6(n)}{L_6(n)}=\frac{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}n^{\frac{1}{2}}+O(1)\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}n^{\frac{1}{2}}+O(1)\right)^{\frac{1}{n}}}=1+O\left(n^{-\frac{1}{2n}}\right),$$

因此有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_6(n)}{I_6(n)}=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{K_6(n)}{L_6(n)}=1$. 此外,注意到 $\lim\limits_{n\to+\infty}K_6(n)=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}L_6(n)=1$,因此

$$\lim_{n\to+\infty}(K_6(n)-L_6(n))=0.$$

证毕.

定理3的证明:

对于任何实数 $x>1$,令 M 是最大的正整数,且 $M(2M-1)\leqslant x<(M+1)(2M+1)$,注意到如果 n 取遍区间 $[m(2m-1),(m+1)(2m+1)]$,则 $a(n)$ 取遍区间 $[0,4m]$,结合引理1及文献[3]中Abel求和公式,有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}a(n)=&\sum_{t=1}^{M-1}\sum_{S(t,6)\leqslant n<S(t+1,6)}a(n)+\sum_{S(M,r)\leqslant n<x}a(n)=\\&\sum_{t=1}^{M-1}(0+1+2+\cdots+4t)+((S(M,6)+1)+\cdots+4M)=\\&\sum_{t=1}^{M-1}2(1+4t)t+O(M^2)=\\&\frac{4}{3}M(M-1)(2M-1)+M(M-1)+O(M^2),\end{aligned}$$

$$\sum_{n\leqslant x}b(n)=\sum_{t=1}^{M-1}\sum_{S(t,6)<n\leqslant S(t+1,6)}a(n)+\sum_{S(M,6)\leqslant n<x}a(n)=$$

$$\sum_{t=1}^{M-1}(1+2+\cdots+4(t+1))+((S(M,6)+1)+\cdots+4M)=$$

$$\sum_{t=1}^{M-1}2(1+4(t+1))(t+1)+O(M^2)=$$

$$\frac{4}{3}M(M+1)(2M+1)+M(M+1)+O(M^2),$$

$$I_6(n)-S_6(n)=\frac{1}{n}\left(\sum_{n\leqslant x}b(n)-\sum_{n\leqslant x}a(n)\right)=$$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{4}{3}M(M+1)(2M+1)+M(M+1)+O(M^2)\right)-$$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{4}{3}M(M-1)(2M-1)+M(M-1)+O(M^2)\right)=$$

$$\frac{8}{n}M^2+\frac{M}{n}+O(1),$$

又由引理 1 知 $m=\frac{\sqrt{2n}}{2}+O(1)=\frac{\sqrt{2x}}{2}+O(1)$，可得

$$I_6(n)-S_6(n)=4+\sqrt{2}n^{-\frac{1}{2}}+O(1),$$

立刻得到：$\lim\limits_{n\to+\infty}(I_6(n)-S_6(n))=4$，$\lim\limits_{n\to+\infty}(I_6(n)-S_6(n))^{\frac{1}{n}}=1$. 证毕.

参考文献：

[1] 黄炜. 关于 r 角形数的部分数列及其均值[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(1)：15-18.

[2] F Smarandache. Only Problems，Not Solutions[M]. Chicago：Xiquan Publishing House，1993.

[3] 黄炜. 关于 r 角形数的补数及其均值性质[J]. 科学技术与工程，2009，9(18)：5432-5434.

[4] 易媛. 关于三角形数补数及其渐近性质[J]. 商洛师范专科学校学报，2005，19(2)：3-5.

[5] 杨存典，李超，刘端森. 关于五边形数的补数及其渐进性质[J]. 西安工业大学学报，2006，26(3)：287-289.

[6] 李洁. 关于正整数的六边形数的补数部分[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2006，23(6)：818-820.

[7] Yan Xiaoxia. On the Smarandache Prime Part[J]. Scientia Magna，2007，3(3)：74-77.

[8] Tom M A. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York：Springer-Verlag，1976.

【责任编辑：伍　林】